

Mathématiques – spécialité

Jour 2 · 17 juin 2026 (métropole) · sujet 26-MATJ2ME1

4 exercices · 20 points · durée officielle 4 h · cap prépa \approx 2 h 30 – corrigé exercice par exercice par l'Institut Hadamard.

Exercice 1 Géométrie dans l'espace

5 points | viser 35 min | **MOYEN**

Repère orthonormé. $A(2; 1; 1)$, $B(3; -2; 0)$, $C(0; -1; 1)$, $D(0; 0; 2)$.

CORRIGÉ

- $\vec{AB} = (1; -3; -1)$ et $\vec{AC} = (-2; -2; 0)$ ne sont pas colinéaires (la 3^e coordonnée de \vec{AC} est nulle, pas celle de \vec{AB}). Donc A, B, C définissent un plan.
- $\vec{n}(1; -1; 4)$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 + 3 - 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -2 + 2 + 0 = 0$: orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, \vec{n} est normal à (ABC) .
 - Le plan a une équation $x - y + 4z + d = 0$; avec $A(2; 1; 1) : 2 - 1 + 4 + d = 0$, donc $d = -5$: $x - y + 4z - 5 = 0$.
- La droite Δ a pour vecteur directeur $(1; -1; 4) = \vec{n}$ (donc orthogonale au plan) et passe par $D(0; 0; 2)$ (obtenu en $t = 0$). La représentation proposée convient.
- $H \in \Delta \cap (ABC)$: en injectant $(t; -t; 2 + 4t)$ dans l'équation, $t + t + 4(2 + 4t) - 5 = 0$, soit $18t + 3 = 0$, $t = -\frac{1}{6}$. D'où $H(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3})$.
- $\vec{BA} = (-1; 3; 1)$ et $\vec{BC} = (-3; 1; 1) : \|\vec{BA}\|^2 = \|\vec{BC}\|^2 = 11$, donc ABC est isocèle en B .
 - $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-2; 2; -8)$, de norme $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; l'aire vaut $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
- La hauteur issue de D est $DH = d(D, (ABC)) = \frac{|0 - 0 + 8 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.
 - $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}(BCD) \times d(A, (BCD)) = 1$ avec $d = \sqrt{2}$, d'où $\mathcal{A}(BCD) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
- $D_k(0; 0; k) \in (ABC) \iff 4k - 5 = 0 \iff k = \frac{5}{4}$. D_k est alors dans le plan, son projeté orthogonal est lui-même, $(0; 0; \frac{5}{4})$.
 - Il faudrait $\vec{D_kA} = (2; 1; 1 - k)$ colinéaire à $\vec{n} = (1; -1; 4)$; or $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$: aucune valeur de k ne convient.

Exercice 2 Suite & équation différentielle

5 points | viser 35 min | **MOYEN**

Bassin de 30 000 L. Modèle discret $V_0 = 0$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$; modèle continu (E) : $y' = -0,005 y + 6$, $v(0) = 0$.

CORRIGÉ

PARTIE A – MODÈLE DISCRET

- $V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = 6$; $V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 11,97$.
- Programme complété :

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995*v + 6
    return v
```

- Réurrence : $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$. Initialisation : $V_0 = 0 \leq V_1 = 6 \leq 1200$. Hérédité : si $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$, alors $V_{n+2} - V_{n+1} = 0,995(V_{n+1} - V_n) \geq 0$ et $V_{n+2} = 0,995 V_{n+1} + 6 \leq 0,995 \times 1200 + 6 = 1200$.
- (V_n) est croissante et majorée par 1200 : elle converge. La limite vérifie $\ell = 0,995 \ell + 6$, soit $0,005 \ell = 6$, d'où $\ell = 1200$ litres.

PARTIE B – MODÈLE CONTINU

- Solutions de (E) : $v(t) = K e^{-0,005 t} + \frac{6}{0,005} = K e^{-0,005 t} + 1200$, $K \in \mathbb{R}$.
 - $v(0) = 0 \Rightarrow K + 1200 = 0 \Rightarrow K = -1200$, d'où $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005 t})$.
 - $e^{-0,005 t} \rightarrow 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200$.
 - $v'(t) = 6 e^{-0,005 t} > 0$: v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- Le seuil de nettoyage est $5\% \times 30\,000 = 1500$ L. Or $v(t) < 1200 < 1500$ pour tout t : aucun nettoyage n'est nécessaire.
- $v(t) = 50 \iff 1 - e^{-0,005 t} = \frac{50}{1200} = \frac{1}{24} \iff e^{-0,005 t} = \frac{23}{24}$, d'où

$$t = \frac{-\ln \frac{23}{24}}{0,005} = 200 \ln \frac{24}{23} \approx 8,51 \text{ h.}$$

Le volume dépasse 50 L au bout de $200 \ln \frac{24}{23}$ heures, soit environ 8 h 31 min.

Exercice 3 Vrai/Faux – probabilités

4 points | viser 30 min | MOYEN

Musiciens professionnels : $\mathbb{P}(O) = 0,52$ (Pop), $\mathbb{P}_O(F) = 0,32$, $\mathbb{P}(F) = 0,20$.

CORRIGÉ

- Affirmation 1 – VRAIE.** $\mathbb{P}(O \cap F) = \mathbb{P}(O) \mathbb{P}_O(F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664$, donc $\mathbb{P}_F(O) = \frac{0,1664}{0,20} = 0,832$.

2. Affirmation 2 – FAUSSE. $X \sim \mathcal{B}(5000; 0,062)$, d'espérance $\mathbb{E}(X) = 310$. Comme $340 > 310$, $\mathbb{P}(X \leq 340) > 0,5$; la calculatrice donne $\mathbb{P}(X \leq 340) \approx 0,96$, et non $0,4$.

3. Affirmation 3 – VRAIE. $\mathbb{E}(X) = 310$, $V(X) = 5000 \times 0,062 \times 0,938 \approx 290,8$. L'intervalle $]230; 390[$ s'écrit $|X - 310| < 80$; par Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(230 < X < 390) \geq 1 - \frac{V(X)}{80^2} = 1 - \frac{290,8}{6400} \approx 0,955 > 0,95.$$

4. Affirmation 4 – VRAIE. Une équipe est formée de 2 professionnels parmi 4 et de 3 non-professionnels parmi 6 : $\binom{4}{2} \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$ équipes possibles.

Exercice 4 Fonction, primitives & intégrale

6 points | viser 50 min | **DIFFICILE**

f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$; logo et porte-clé obtenus par symétrie.

CORRIGÉ

PARTIE A

1. a. Tangente horizontale en C d'abscisse 1 : $f'(1) = 0$.

b. La courbe coupe l'axe des abscisses en $A(\frac{1}{2}; 0)$, donc sur $[0; 3]$: $f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

2. $f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de T_A , qui passe par $A(\frac{1}{2}; 0)$ et $B(1; e^2)$: $f'(\frac{1}{2}) = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2$.

3. Une primitive F vérifie $F' = f$: décroissante sur $[0; \frac{1}{2}[$ ($f < 0$), croissante sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$ ($f > 0$), donc *minimum en* $x = \frac{1}{2}$. Deux primitives diffèrent d'une constante (translation verticale) et ont leur minimum à la même abscisse : ce sont C_1 et C_2 (minimum aligné sur $x = \frac{1}{2}$); C_3 , dont le minimum est ailleurs, n'en est pas une.

PARTIE A (SUITE) $(F(X) = (2X - 1)E^{-2X+3})$

1. a. $e^2 \cdot \frac{2x - 1}{e^{2x-1}} = (2x - 1)e^2 e^{-(2x-1)} = (2x - 1)e^{2-2x+1} = (2x - 1)e^{-2x+3} = f(x)$.

b. En posant $X = 2x - 1 \rightarrow +\infty$: $f = e^2 \cdot \frac{X}{e^X} \rightarrow 0$ (croissance comparée), donc $\lim_{+\infty} f = 0$.

2. a. $f'(x) = 2e^{-2x+3} + (2x - 1)(-2)e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}$.

b. $f'(x) = 4(1 - x)e^{-2x+3}$ a le signe de $1 - x$: f croît sur $[0; 1]$ puis décroît sur $[1; +\infty[$. Maximum $f(1) = e$; $f(0) = -e^3$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

| | | | |
|---------|--------|------------|--------------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 |
| f | $-e^3$ | \nearrow | $e \searrow$ |
| | | | 0 |

3. La contrainte 0,3 cm impose une demi-épaisseur 0,15, d'où $f(\alpha) = 0,15$. Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante de $f(1) = e \approx 2,72$ vers 0; comme $0,15 \in]0; e[$, le théorème de la bijection donne une unique solution, $\alpha \approx 3,3$.

PARTIE C (PORTE-CLÉ, ÉPAISSEUR 0,2 CM)

1. Intégration par parties avec $u = 2x - 1$ ($u' = 2$) et $v' = e^{-2x+3}$ ($v = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$) : une primitive de f est $-x e^{-2x+3}$. Donc

$$I = \left[-x e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -3,3 e^{-3,6} + 0,5 e^2 \approx -0,09 + 3,69 \approx 3,6.$$

2. Le logo est symétrique par rapport à l'axe des abscisses : son aire vaut $2I = 7,2 \text{ cm}^2$.

Volume = aire \times épaisseur = $7,2 \times 0,2 = 1,44 \approx 1,4 \text{ cm}^3$.