HADAMARD CORRIGÉ • BAC 2026

Mathématiques – spécialité

Jour 1 · 16 juin 2026 (métropole) · sujet 26-MATJ1ME1

4 exercices · 20 points · durée officielle 4 h · cap prépa ≈ 2 h 30 – corrigé exercice par exercice par l'Institut Hadamard.

Exercice 1 Probabilités

5 points | viser 30 min | MOYEN

Une famille peut réserver une cabine (C) et un emplacement véhicule (V). On donne $\mathbb{P}(V) = 0{,}30$, $\mathbb{P}_V(C) = 0{,}80$ et $\mathbb{P}(C) = 0{,}75$.

CORRIGÉ

PARTIE A

1. **a.** $\mathbb{P}(C) = 0{,}75$ (donnée de l'énoncé).

   b. Les quatre probabilités manquantes de l'arbre :

$$\mathbb{P}(V) = 0{,}3, \quad \mathbb{P}(\overline{V}) = 0{,}7, \quad \mathbb{P}_V(C) = 0{,}8, \quad \mathbb{P}_V(\overline{C}) = 0{,}2.$$

2. $\mathbb{P}(V \cap C) = \mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}_V(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24.$

3. $\mathbb{P}_C(V) = \dfrac{\mathbb{P}(V \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{0{,}24}{0{,}75} = 0{,}32.$

4. Formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V \cap C) + \mathbb{P}(\overline{V} \cap C)$, donc $\mathbb{P}(\overline{V} \cap C) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51$. D'où

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(C) = \frac{\mathbb{P}(\overline{V} \cap C)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \frac{0{,}51}{0{,}7} \approx 0{,}73.$$

   Interprétation : parmi les familles ne réservant pas d'emplacement véhicule, environ 73 % réservent tout de même une cabine.

PARTIE B

1. $\mathbb{E}(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24 = 96.$
   $\mathbb{E}(X^2) = 70^2(0{,}06) + 100^2(0{,}51) + 170^2(0{,}24) = 294 + 5100 + 6936 = 12330$, donc

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 12330 - 96^2 = 12330 - 9216 = 3114.$$

2. **a.** Une remise de 40 % revient à payer 60 % du total $X + Y$: $Z = 0{,}6(X + Y)$.

   b. Par linéarité : $\mathbb{E}(Z) = 0{,}6\big(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\big) = 0{,}6(96 + 104) = 120.$
   X et Y indépendantes, donc $V(Z) = 0{,}6^2\big(V(X) + V(Y)\big) = 0{,}36(3114 + 1686) = 0{,}36 \times 4800 = 1728.$

3. **a.** Les Z_i sont i.i.d. de loi celle de Z, donc $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(Z) = 120$ et $V(M_n) = \dfrac{V(Z)}{n} = \dfrac{1728}{n}$.

b. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec l'écart $a = 6$ (car $114 = 120 - 6$ et $126 = 120 + 6$) :

$$\mathbb{P}\big(|M_n - 120| \geqslant 6\big) \leqslant \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1728}{36n} = \frac{48}{n}.$$

Donc $\mathbb{P}(114 < M_n < 126) = 1 - \mathbb{P}\big(|M_n - 120| \geqslant 6\big) \geqslant 1 - \dfrac{48}{n}$. On impose

$$1 - \frac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \iff \frac{48}{n} \leqslant 0{,}15 \iff n \geqslant 320.$$

> Le plus petit entier convenable est $n = 320$: à partir de 320 familles, l'inégalité garantit qu'au moins 85 % du temps le prix moyen est compris entre 114 et 126 €.

Exercice 2 Géométrie dans l'espace & dénombrement

4 points | viser 35 min | **MOYEN**

Vrai/Faux à justifier. Repère orthonormé ; (d) : $x = t$, $y = -1{,}5 - t$, $z = 2 - 2t$; $A(3\,;0\,;2)$, $B(2\,;1\,;-3)$; *plan* (P) : $-x + y - 5z - 0{,}5 = 0$.

CORRIGÉ

1. **a.** **Affirmation 1 – VRAIE.** $\overrightarrow{AB} = (-1\,;1\,;-5)$ est exactement le vecteur normal $\vec{n}_P = (-1\,;1\,;-5)$ de (P) : donc $(P) \perp (AB)$. Le milieu $I\big(2{,}5\,;0{,}5\,;-0{,}5\big)$ de $[AB]$ vérifie $-2{,}5 + 0{,}5 - 5(-0{,}5) - 0{,}5 = 0$. Le plan passe par I : c'est le plan médiateur de $[AB]$.

b. **Affirmation 2 – FAUSSE.** (d) a pour vecteur directeur $\vec{u} = (1\,;-1\,;-2)$, non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. En cherchant un point commun, les deux premières équations donnent $t = 3 - s$ et $-1{,}5 - t = s$, d'où $-4{,}5 = 0$: système *impossible*. Les droites ne sont pas sécantes (elles sont non coplanaires).

c. **Affirmation 3 – VRAIE.** Avec $C(1{,}5\,;-3\,;-1)$: $\overrightarrow{CA} = (1{,}5\,;3\,;3)$, $\overrightarrow{CB} = (0{,}5\,;4\,;-2)$.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 6{,}75, \quad \|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = 4{,}5, \quad \cos\widehat{ACB} = \frac{6{,}75}{4{,}5 \times 4{,}5} = \frac{1}{3}.$$

Donc $\widehat{ACB} = \arccos\frac{1}{3} \approx 70{,}5°$.

2. **Affirmation 4 – VRAIE.** Porte A : code ordonné de 3 symboles distincts parmi 8, soit $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ codes $\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Clotilde}) = \frac{1}{336} \approx 0{,}003$. Porte B : code non ordonné de 4 symboles parmi 8, soit $\binom{8}{4} = 70$ codes $\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Titouan}) = \frac{1}{70} \approx 0{,}014$. Comme $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte.

Exercice 3 Équation différentielle & suite

6 points | viser 45 min | **DIFFICILE**

Chauffage d'une pièce. (E) : $y' = -0{,}035\,y + 0{,}91$, $T(0) = 18$, *puis refroidissement par* $u_0 = 20$, $u_{n+1} = 0{,}965\,u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n}$.

CORRIGÉ

PARTIE A – PHASE DE CHAUFFAGE

1. (E) : $y' = -0{,}035\,y + 0{,}91$. Solution particulière constante : $\frac{0{,}91}{0{,}035} = 26$. Les solutions sont $t \mapsto K\,\mathrm{e}^{-0{,}035\,t} + 26$, $K \in \mathbb{R}$.

2. $T(0) = 18 \Rightarrow K + 26 = 18 \Rightarrow K = -8$. Donc $T(t) = 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}035\,t}$.

3. $T(t) = 20 \iff 8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} = 6 \iff \mathrm{e}^{-0{,}035t} = 0{,}75$, d'où

$$t = \frac{-\ln(0{,}75)}{0{,}035} = \frac{\ln(4/3)}{0{,}035} \approx 8{,}22 \text{ dizaines de minutes} \approx 82 \text{ min.}$$

> La pièce atteint $20\,°\mathrm{C}$ au bout d'environ 1 h 22 min.

4. $T'(t) = 0{,}28\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} > 0$: T est croissante, et $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 26$. Donc $T(t) < 26$ pour tout t : la température ne peut pas dépasser $28\,°\mathrm{C}$ (ni même $26\,°\mathrm{C}$).

PARTIE B – PHASE DE REFROIDISSEMENT

1. $u_1 = 0{,}965 \times 20 + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^0 = 19{,}3 + 0{,}35 + 0{,}07 = 19{,}72$.

2. *Récurrence : $u_n > 10$ pour tout n.* Initialisation : $u_0 = 20 > 10$. Hérédité : si $u_n > 10$, alors $0{,}965\,u_n > 9{,}65$, et comme $0{,}35 > 0$ et $0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 0$,

$$u_{n+1} = 0{,}965\,u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 9{,}65 + 0{,}35 = 10.$$

La propriété est héréditaire, donc $u_n > 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (u_n) est décroissante (admis) et minorée par 10 : par le théorème de la convergence monotone, elle converge.

4. **a.** En passant à la limite (avec $\mathrm{e}^{-0{,}1n} \to 0$ et $u_n, u_{n+1} \to \ell$) : $\ell = 0{,}965\,\ell + 0{,}35$. Donc ℓ est solution de $x = 0{,}965x + 0{,}35$.

b. $0{,}035\,\ell = 0{,}35 \Rightarrow \ell = 10$. Sans relance du chauffage, la température de la pièce tendrait vers $10\,°\mathrm{C}$ (sans jamais descendre en dessous).

5. **a.** Lignes 4 à 6 complétées (l'algorithme s'arrête dès que la température repasse sous 18) :

```
1.  def marche() :
2.      n = 0
3.      u = 20
4.      while u > 18 :
5.          u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
6.          n = n + 1
7.      return n
```

b. En itérant la suite : $u_6 \approx 18{,}38$, $u_7 \approx 18{,}12$ (encore > 18), puis $u_8 \approx 17{,}87 \leqslant 18$.

> Le chauffage se remet en marche au bout de $n = 8$ dizaines de minutes, soit 80 minutes (1 h 20).

Exercice 4 Fonction logarithme

5 points | viser 40 min | MOYEN

$f(x) = a + \dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$, courbe passant par $A(0\,;1)$ de tangente T_A.

CORRIGÉ

PARTIE A

1. $f(0) = a + \dfrac{b \ln 1}{1} = a$. La courbe passe par $A(0\,;1)$, donc $f(0) = 1$, d'où $a = 1$.

2. **a.** T_A passe par $A(0\,;1)$ et coupe l'axe des abscisses en $x = -0{,}25$; sa pente vaut $\dfrac{1-0}{0-(-0{,}25)} = 4$, donc $f'(0) = 4$.

b. Au voisinage de $x = 1$ la courbe est concave (tournée vers le bas), donc $f''(1) < 0$.

3. **a.** Dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = b \cdot \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b\big(1 - \ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}.$$

b. $f'(0) = \dfrac{b(1-\ln 1)}{1} = b$. Or $f'(0) = 4$, donc $b = 4$.

PARTIE B $\quad (F(X) = 1 + \frac{4\,\mathrm{LN}(X+1)}{X+1})$

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ (croissance comparée), donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. $1 - \ln(x+1) > 0 \iff \ln(x+1) < 1 \iff x + 1 < \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e} - 1$. Sur $]-1\,;+\infty[$: $S =]-1\,;\mathrm{e}-1[$.

3. $f'(x) = \dfrac{4\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}$; comme $(x+1)^2 > 0$, le signe de f' est celui de $1 - \ln(x+1)$: positif sur $]-1\,;\mathrm{e}-1[$, négatif sur $]\mathrm{e}-1\,;+\infty[$. f admet un maximum en $x = \mathrm{e} - 1$, avec

$$f(\mathrm{e}-1) = 1 + \frac{4\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 + \frac{4}{\mathrm{e}} \approx 2{,}47.$$

x	-1		$\mathrm{e}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

4. Sur $[2\,;+\infty[\subset [\mathrm{e}-1\,;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante de $f(2) = 1 + \frac{4\ln 3}{3} \approx 2{,}46$ vers 1. Comme $1{,}5 \in]1\,;2{,}46[$, le théorème de la bijection assure une unique solution α. Numériquement $\alpha \approx 25{,}1$.

5. **a.** Avec $u = \ln(x+1)$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$; les bornes deviennent 0 et $\ln 3$:

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln 3} = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

b. $f > 0$ sur $[0\,;2]$, donc l'aire vaut

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2 + 4 \cdot \frac{(\ln 3)^2}{2} = 2 + 2(\ln 3)^2 \approx 4{,}41 \text{ u.a.}$$

Corrigé proposé par l'Institut Hadamard – hadamard.fr. Le sujet officiel complet (26-MATJ1ME1) est disponible en téléchargement sur la page.