Banques MP et MPI inter-ENS – Session 2024
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

- **Coefficients (en % du total des points de chaque concours) :**
  — Lyon : MP concours M-MP et M-MI 10,8 % ; MP concours Info 11,3 ; MPI 8,5 %
  — Paris-Saclay : MP concours MP et MI 9,6 % ; MP concours Info et MPI 13,2 %
  — Rennes : MP 9,6 % ; MPI 8,3 %
  — Ulm : MP concours P 3,7 % ; MP concours Info et MPI 13,3 %

- **Membres du jury :**
  François Bolley, Emeric Bouin, Didier Lesesvre, Kévin Le Balc'h, Jérémy Le Borgne, Vincent Perrollaz, Thomas Simon, correcteurs

---

Présentation générale

Le sujet Math C 2024 portait d'une part sur l'étude, des applications et des réciproques partielles du lemme de Cesàro sur les suites numériques (partie I), d'autre part sur l'étude de théorèmes d'Abel et taubériens sur les séries entières (partie II), enfin de variantes continues de certains de ces résultats (partie III).

L'épreuve a permis de tester l'aisance des candidats à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires, avec notamment des arguments variés d'analyse réelle, de suites et séries numériques, de séries entières et d'intégrales, à l'aide de calculs et de bornes explicites et d'arguments abstraits.

Les notes se sont étalées de 0/20 à 20/20, avec une moyenne de 9,7/20 et un écart-type de 3,8. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. Il n'a pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. Au contraire, le jury a apprécié la démarche de certains candidats annonçant clairement et honnêtement une possibilité de démonstration, qu'elle soit finalement réalisable ou non, et reconnaissant ne pas avoir en main les arguments précis pour la mener à bien. Notons par ailleurs que l'utilisation de notions et de raisonnements non ou mal maîtrisés, qu'ils soient ou non au programme du concours, n'est pas encouragée. La présentation entre également pour une part importante dans l'appréciation d'une copie, et l'utilisation d'un brouillon, même ponctuelle, est fortement recommandée. Enfin, il est rappelé qu'il convient de bien dégager les hypothèses nécessaires pour invoquer tout résultat au programme permettant de répondre à une question du sujet.

obtenir une bonne note s'ils se cantonnent aux questions les plus simples de chaque partie. Ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés. Dans l'ensemble, le jury a constaté que de nombreux candidats ne semblent pas à l'aise avec des raisonnements élémentaires d'analyse réelle. En particulier, les justifications de comparaison de séries et d'intégrales, d'utilisation d'équivalents entre suites ou entre fonctions, ou d'intégrabilité étaient trop souvent absentes ou incorrectes.

Partie I

La première partie du sujet proposait l'étude, des applications et des réciproques partielles du lemme de Cesàro sur les suites numériques. On en donnait tout d'abord la démonstration, puis étudiait des applications, abstraites ou à des exemples concrets de suites, que l'on retrouvait ou complétait éventuellement par des arguments de comparaison ; on en déduisait notamment des résultats de type Cauchy sur des suites et séries convergentes. Après avoir vérifié que la réciproque du lemme de Cesàro n'est pas vraie en général, on démontrait cette réciproque sous une hypothèse de monotonie de la suite puis des hypothèses plus ou moins fortes de comportement asymptotique de la suite des différences entre deux termes consécutifs de la suite (théorèmes de Hardy).

Cette partie a été abordée par tous les candidats, mais de manière très inégale. Le jury a été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des candidats ; il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

La question 1 pouvait être résolue par des découpages dans les sommes ou par sommation d'équivalents. Le jury a été déçu par le grand nombre de raisonnements imprécis.

Les deux parties de la question 2 demandaient une manipulation soigneuse des indices afin d'appliquer la question 1, d'une part, et des indices et des termes de bord dans les sommes, d'autre part.

Dans la question 3 il fallait veiller à mentionner et utiliser à bon escient l'hypothèse $\alpha \neq 0$. Certains candidats ayant résolu la question 1 par sommation d'équivalents ont pu être perturbés par cette question. Le jury en a été conscient et a valorisé leurs copies avec bienveillance.

La première partie de la question 4, y compris les cas $\ell = 0$ et $\ell = +\infty$, pouvait être traitée directement en appliquant le lemme de Cesàro. Certains candidats ont plutôt appliqué la question 3. Dans ce cas il fallait veiller à ne pas oublier le cas $\ell = 1$, en plus des cas $\ell = 0$ et $\ell = +\infty$.

Les deux exemples s'en déduisaient par un bon choix de u_n et un bon calcul de limite, incluant une forme indéterminée qui n'a pas toujours semblé maîtrisée. Dans le deuxième exemple, l'utilisation directe de la formule de Stirling n'a pas été acceptée.

Dans la question 5 on pouvait tout d'abord traiter le cas $a = 0$, puis s'y ramener, ou bien traiter le cas général directement.

L'ensemble des questions 1 à 5 ne présentait pas de difficulté majeure et n'a cependant été résolu proprement que par une minorité de copies.

La question 6 était plus délicate et n'a été traitée correctement que par un petit nombre de can-

La question 7 a été traitée correctement par un grand nombre de candidats. Le jury attendait une justification du contre-exemple proposé.

Dans la question 8, de nombreux candidats n'ayant pas utilisé le théorème dit de la limite monotone se sont perdus dans des raisonnements vagues ou qui n'ont pas abouti.

Dans les questions 9 et 10a, les changements d'indices dans les sommes n'ont pas toujours été effectués avec précision.

Dans la question 10b on était amené à comparer une somme de $1/k$ à une intégrale, dans l'esprit de la question 2. Cette question 2 ne pouvait cependant pas être invoquée directement, contrairement à ce que de nombreux candidats ont avancé sans justification.

Dans la question 10c, comme dans toutes les questions, les nombreuses tentatives d'escroquerie ont été sanctionnées, alors que les tentatives non concluantes mais présentées honnêtement ont été valorisées.

Partie II

La deuxième partie du sujet proposait de démontrer un théorème d'Abel portant sur le comportement au bord du disque de convergence de la somme d'une série entière, d'en étudier une application au calcul d'une série alternée et d'établir des réciproques partielles, sous la forme de théorèmes taubériens.

La question 1a pouvait être résolue par application directe d'un théorème du programme ; encore fallait-il en énoncer et vérifier proprement les hypothèses. Dans cette question 1a, comme dans toute cette partie, il ne convenait pas d'appliquer directement le théorème dit d'Abel radial, ainsi que plusieurs copies l'ont fait.

Dans la question 1c il fallait justifier précisément le passage à la limite dans chacun des termes obtenus à la question 1b.

La question 1d était la question la plus délicate de cette question 1. De nouveau le jury a dû sanctionner les tentatives d'escroquerie. L'obtention de $\rho(\theta_0)$ pouvait être menée à bien par plusieurs méthodes, notamment par un argument de continuité ou en mettant en évidence une valeur explicite convenable.

Dans la question 2, le jury a sanctionné les copies ne justifiant pas proprement la convergence de la série considérée ou la valeur du rayon de convergence.

La question 3 a été mal comprise par de nombreux candidats, qui ont exhibé des exemples sans lien avec la question, tels que $\sum_{n\geqslant 0} z^n$.

Les questions 4a et 4b ont été bien traitées en général. L'inégalité clé $1 - x^k \leq k(1-x)$ pour $x \in]0,1[$ a souvent été utilisée sans justification propre.

Nombre de candidats ayant abordé la question 5b n'en ont pas vu la difficulté, qu'on pouvait résoudre en remarquant notamment que, pour chaque x, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, g(x^n)$ est une troncature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

Dans la question 5f les dessins convaincants et commentés ont été valorisés par le jury.

Dans la question 5g le jury a sanctionné une utilisation du théorème de Stone Weierstrass sans mention de ses hypothèses.

Les questions 5i et 5j n'ont été abordées que par un très petit nombre de candidats. Elles nécessitaient une compréhension globale de cette question 2 et une rédaction soignée, ce que le jury a eu le plaisir d'observer dans quelques excellentes copies ; ces copies ont été valorisées.

Partie III

La troisième partie proposait de démontrer des variantes continues de certains des résultats démontrés dans les deux premières parties, les énoncés et démonstrations portant dans ces parties sur des suites, séries et séries entières étant remplacés par des énoncés et démonstrations portant sur des intégrales sur $\mathbb{R}$ ou $]0,+\infty[$. Cette partie a été abordée par un petit nombre de candidats, souvent sur ses questions les plus faciles, au détriment des questions délicates de la fin de la partie II.

Les questions 1 et 2 pouvaient être résolues par des arguments analogues à ceux utilisés dans la partie I dans le cadre des séries. Elles ont en général été bien traités par les candidats qui les ont abordées. De nouveau il fallait justifier proprement toutes les affirmations énoncées.

La question 3 était plus délicate que son pendant discret de la partie I . Elle a été traitée par une poignée d'excellentes copies qui ont fait preuve de créativité et de rigueur remarquables.

Le positionnement de la question 4 en fin de sujet n'autorisait pas les candidats à utiliser un théorème de dérivation sous l'intégrale sans en vérifier proprement les hypothèses. Il en est de même de l'intégration par parties avec borne infinie de la question 5b.

Les questions 6 et 7 n'ont pas été abordées par un nombre significatif de copies.

⋆ ⋆
⋆