

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2023**

**VENDREDI 21 AVRIL 2023**

**08h00 - 12h00**

**FILIERES MP et MPI**

**Epreuve n° 9**

**MATHEMATIQUES C (ULSR)**

## DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  un entier strictement positif.

- On dit qu'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé est relativement compacte si elle est incluse dans un compact.
- Sur  $\mathbb{R}^d$ , on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel, défini par  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$  pour tous  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (y_1, \dots, y_d)$ . On notera également  $\| \cdot \|$  la norme associée à ce produit scalaire.
- Pour  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact, on note  $C(K, \mathbb{R}^d)$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}^d$  que l'on munit de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ .
- On dit qu'une partie  $A$  de  $C(K, \mathbb{R}^d)$  est équicontinue en  $x \in K$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \text{ tel que } \forall f \in A, \forall y \in B(x, r), \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

où  $B(x, r)$  désigne la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  centrée en  $x$  et de rayon  $r$ .

On dit que  $A$  est équicontinue si elle est équicontinue en tout point  $x \in K$ .

On s'intéresse dans tout le sujet au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) = y_{init} \end{cases} \quad (1)$$

avec  $F$  une fonction sur  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $y_{init} \in \Omega$ .

On dit que ce problème de Cauchy admet une solution si il existe  $T \in ]0, +\infty]$  et une fonction  $\phi : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  dérivable telle que  $\phi(0) = y_{init}$ ,  $\phi([0, T[) \subset \Omega$  et vérifiant  $\phi'(t) = F(\phi(t))$  pour tout  $t \in [0, T[$ . On dit que  $(\phi, T)$  est une solution du problème de Cauchy.

On dira que  $(\phi, T)$  est une solution maximale du problème de Cauchy (1), si  $(\phi, T)$  est une solution et s'il n'existe pas de solution  $(\psi, T')$  qui vérifie  $T < T'$  et  $\forall t \in [0, T[, \psi(t) = \phi(t)$ . Si  $T = +\infty$  on dira que  $\phi$  est une solution globale.

Dans tout le sujet on admet que **toute solution peut-être prolongée en solution maxi-**

## I - PREMIERS EXEMPLES

Dans cette partie, on admet que toutes les équations proposées admettent une unique solution et que celle-ci est globale. De plus on considère uniquement le cas  $d = 1$ . Soient  $a, \theta > 0$  et  $0 < y_{init} < \theta$ .

1. On considère le problème de Cauchy associé à  $F_0$  définie par :

$$\forall y \in ]0, +\infty[, \quad F_0(y) = ay \ln \left( \frac{\theta}{y} \right).$$

On note  $\phi_0$  la solution de ce problème sur  $[0, +\infty[$ .

- (a) Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]0, \varepsilon]$  on a  $y_{init} < \phi_0(t) < \theta$ .
  - (b) En considérant la fonction  $z_0(t) = \ln(\phi_0(t)/\theta)$  trouver l'expression de  $\phi_0$ .
  - (c) En déduire que  $\phi_0$  vérifie  $y_{init} < \phi_0(t) < \theta$  pour tout  $t \in ]0, +\infty[$  et que de plus  $\phi_0$  est strictement croissante.
2. Pour  $0 < \mu \leq 1$ , on considère  $F_\mu$  définie par :

$$\forall y \in ]0, +\infty[, \quad F_\mu(y) = \frac{a}{\mu} y \left( 1 - \left( \frac{y}{\theta} \right)^\mu \right).$$

En considérant la fonction  $z_\mu(t) = \phi_\mu(t)^{-\mu}$  trouver l'expression de la solution  $\phi_\mu$  sur  $[0, +\infty[$  associée à  $F_\mu$ .

3. (a) Montrer que  $F_\mu$  converge simplement vers  $F_0$  lorsque  $\mu$  tend vers 0.
- (b) Montrer que  $\phi_\mu$  converge simplement vers  $\phi_0$  lorsque  $\mu$  tend vers 0.

## II - UN THÉORÈME DE COMPACTITÉ

Dans cette section, on considère  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ . On rappelle que l'espace vectoriel  $C(K, \mathbb{R}^d)$  est muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ .

1. Soit  $k > 0$  et  $B$  l'ensemble des fonctions de  $K$  dans  $\mathbb{R}^d$  qui sont  $k$ -lipschitziennes. Montrer que  $B$  est équicontinue.

Soit  $A$  une partie de  $C(K, \mathbb{R}^d)$ . On cherche à montrer dans la suite de cette partie le théorème

2. Montrer qu'une partie  $A \subset C(K, \mathbb{R}^d)$  est relativement compacte si et seulement si toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  admet une sous-suite qui converge uniformément vers une limite  $f \in C(K, \mathbb{R}^d)$ .
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que si  $A$  est relativement compacte alors  $A$  est équicontinue.
4. Montrer que  $(P1) \Rightarrow (P2)$ .

On suppose maintenant que  $A$  vérifie  $(P2)$ . On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$ .

5. Soit  $(x_p)_{p \geq 0}$  une suite d'éléments de  $K$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une suite  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de fonctions strictement croissantes de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $p \geq 0$ ,  $f_{\psi_p(n)}(x_p)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini avec  $\psi_0 = \varphi_0$  et  $\psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p$  pour  $p \geq 1$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $p \geq 0$ ,  $f_{\psi_p(n)}(x_p)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini.
6. (a) Montrer que l'on peut extraire de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge simplement sur  $\mathbb{Q} \cap K$ . On notera  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cette extraction.
  - (b) Pour  $x \in K$ , montrer que  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une unique valeur d'adhérence notée  $g(x)$  et conclure sur la convergence simple de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $K$  vers  $g$ .
7. (a) Montrer que  $g$  est continue sur  $K$ .
  - (b) Montrer que la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$  sur  $K$ . (*Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*)
  - (c) En déduire que  $(P2) \Rightarrow (P1)$ .

### III - EXISTENCE DE SOLUTIONS

On considère dans cette partie que la fonction  $F$  est continue et  $y_{init} \in \Omega$ . Pour tout  $r \geq 0$ , on note  $B_r$  la boule fermée de centre  $y_{init}$  et de rayon  $r$ .

1. Montrer que l'on peut choisir  $r > 0$  et  $T > 0$  tels que  $B_r \subset \Omega$  et tels que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on puisse définir par récurrence, en posant  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , une suite  $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$  à valeurs dans  $B_r$  telle que :

3. Montrer, à l'aide du *Théorème 1*, qu'il existe une sous-suite de  $\phi_N$  qui converge uniformément sur  $[0, T]$  vers une fonction continue  $\phi$ .
4. Montrer que l'on peut définir une suite de fonctions en escalier  $\psi_N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\psi_N(t) = \phi_N(t)$  pour  $t \in \{n\Delta t \mid n \in \{0, \dots, N\}\}$  et telle que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \phi_N(t) = y_{init} + \int_0^t F(\psi_N(s)) ds \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

On précisera l'expression des fonctions  $\psi_N$ .

5. En déduire qu'il existe une sous-suite de  $\psi_N$  qui converge uniformément sur  $[0, T]$  et préciser sa limite.
6. Montrer que  $(\phi, T)$  est solution du problème de Cauchy (1) et en déduire le théorème suivant :

*Théorème 2 : Si  $F$  est une fonction continue, alors il existe au moins une solution du problème de Cauchy (1).*

7. On considère le cas particulier pour  $d = 1$  donné pour tout  $y \in \mathbb{R}$  par  $F(y) = 3|y|^{2/3}$  et  $y_{init} = 0$ . Montrer que ce problème de Cauchy admet une infinité de solutions globales.

#### IV - INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

On s'intéresse maintenant à une extension du problème de Cauchy (1). On considère cette fois  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  des parties compactes de  $\mathbb{R}^d$ . On considère alors le problème d'inclusion différentielle défini par :

$$\begin{cases} y'(t) \in \mathcal{F}(y(t)) \\ y(0) = y_{init} \end{cases} \quad (2)$$

On s'intéresse aux solutions de ce problème qui sont continues et  $C^1$  par morceaux. Pour  $T \in ]0, +\infty]$ , on dira que  $(\phi, T)$  est une solution de (2) si il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $0 = t_0 < \dots < t_N = T$  tels que :

- (i)  $\phi$  est continue sur  $[0, T[$ .
- (ii) Pour tout  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $\phi$  soit  $C^1$  sur  $]t_i, t_{i+1}[$  et  $\phi'$  admette une limite à droite en

On utilisera comme dans le cas du problème (1) les notions de solutions maximales et globales.

1. Montrer que si pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ , il existe  $C_K > 0$  telle que  $\mathcal{F}$  vérifie :

$$\forall x, y \in K, \forall v_x \in \mathcal{F}(x), \forall v_y \in \mathcal{F}(y), \quad \langle v_x - v_y, x - y \rangle \leq C_K \|x - y\|^2 \quad (3)$$

alors, le problème (2) admet au plus une solution maximale. (*Indication : On pourra regarder  $\|X(t) - Y(t)\|^2$  pour  $X$  et  $Y$  deux solutions*)

Dans toute la suite, on considère le problème d'inclusion différentielle donné par  $d = 2$  et  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$  définie pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  par :

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \{v^-\} & \text{si } x_1 < 0 \\ \{v^+\} & \text{si } x_1 > 0, \\ [v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

où  $v^- = (v_1^-, v_2^-) \in \mathbb{R}^2$  et  $v^+ = (v_1^+, v_2^+) \in \mathbb{R}^2$  avec  $v_1^- \geq v_1^+$  et  $v_2^- \geq v_2^+$ .

2. On pose  $v^- = (1, 2)$  et  $v^+ = (-1, 2)$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{F}$  vérifie la condition (3).
  - (b) On choisit  $y_{init} = (0, 0)$ . Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).
  - (c) On choisit  $y_{init} = (1, 0)$ . Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).
3. On pose  $v^- = (0, 1)$  et  $v^+ = (1, 1)$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{F}$  ne vérifie pas la condition (3).
  - (b) On choisit  $y_{init} = (1, 0)$ . Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).
  - (c) On choisit  $y_{init} = (0, 0)$ . Trouver toutes les solutions maximales du problème (2).