ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Probabilité qu'un entier choisi au hasard et uniformément dans $[\![1;n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

---

La partie 1 permet d'obtenir un développement en série utilisé dans la partie 2.

La partie 2 n'utilise que le développement en série obtenu à la dernière question de la partie 1 et en est donc indépendante exceptée cette question. Cette partie 2 permet un calcul effectif de proche en proche des valeurs de la fonction zêta en un entier pair non nul à partir des nombres de Bernoulli.

La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2. La partie 4 utilise les valeurs obtenues à la dernière question de la partie 2 et est donc indépendante des parties 1 et 2 exceptée cette question.

Dans les parties 3 et 4, on se donne un entier naturel non nul n et un entier naturel k vérifiant $k \geq 2$. On s'intéresse au tirage uniforme d'un entier dans $[\![1;n]\!]$ et on détermine la probabilité $q_n(k)$ que cet entier soit sans facteur à la puissance k.
On montre enfin que à k fixé, la suite $(q_n(k))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et on détermine sa limite.

Partie 1 : Calcul de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$

1 $\triangleright$ Soit $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta}\frac{1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t.$$

2 $\triangleright$ En déduire que pour $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$, la série numérique $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{e^{ik\theta}}{k}$ converge, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t.$$

3 $\triangleright$ En déduire que pour $\theta \in]0;\pi[$, la série numérique $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{\sin(k\theta)}{k}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Indication : Pour $\theta \in]0;\pi[$, on pourra introduire la fonction $u_\theta : [0;1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$u_\theta(t) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{t\sin(\theta)}{1-t\cos(\theta)}\right),$$

et vérifier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 u'_\theta(t)\mathrm{d}t.$$

4 ▷ Soit S la fonction numérique définie pour tout t réel par $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.
Justifier que S est bien définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que S est également continue sur $\mathbf{R}$.

5 ▷ En déduire que pour tout $\theta \in [0;\pi[$, on a :

$$S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0).$$

6 ▷ Pour tout x réel, on introduit la fonction numérique g_x bien définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)}.$$

Justifier que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g_x(t)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g''_x(t) - x^2 g_x(t) = -S(t).$$

7 ▷ Pour un réel x non nul fixé, déterminer une solution polynomiale $t \mapsto P(t)$ de degré 2 de l'équation différentielle :

$$(E_x) : \forall t \in \mathbf{R}, \quad y''(t) - x^2 y(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi t}{2} - S(0).$$

8 ▷ Pour tout réel x, calculer $g'_x(0)$ et $g'_x(\pi)$. Pour x réel non nul, montrer que :

$$g''_x(0) = -\frac{\pi}{2x} \times \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}.$$

9 ▷ En déduire que pour tout réel x non nul :

$$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x}-1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2+x^2}.$$

Partie 2 : Développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ et applications

On introduit la fonction h, définie sur $\mathbf{R}$, par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On rappelle également que la fonction zêta de Riemann est définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

10 ▷ Soient $x \in]-1;1[$ et deux entiers naturels N et n avec $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\frac{1}{x^2+n^2} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{-x^2}{n^2} \right)^k \right) + R_{N,n}(x),$$

où $R_{N,n}(x) = (-1)^{N+1} \dfrac{1}{x^2+n^2} \times \dfrac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}}$, et justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \zeta(2N+2)|x|^{2N+2}.$$

11 ▷ Après avoir justifié que $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$, en déduire que pour $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) x^{2k}.$$

12 ▷ En déduire que la fonction h est développable en série entière, et que pour tout $x \in]-2\pi;2\pi[$:

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}.$$

Pour tout k entier naturel, on pose : $b_k = h^{(k)}(0)$.
Déterminer alors b_0 et b_1. De plus, si k est un entier naturel non nul, déterminer b_{2k} ainsi que b_{2k+1}.

13 ▷ Justifier que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = 0.$

Indication : On pourra remarquer que pour x réel non nul : $\dfrac{x}{e^x-1} \times \dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

14 ▷ À l'aide des valeurs de b_0 et b_1 calculées précédemment et de la question 13 ▷, calculer b_2 et b_4.
En utilisant la question 12 ▷, déterminer les valeurs $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Partie 3 : Probabilité qu'un entier naturel choisi au hasard et uniformément dans $[\![1; n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

* On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On ordonne $\mathcal{P}$ par ordre croissant, et on note p_n le n-ième nombre premier. Ainsi, par exemple, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ et $p_7 = 17$.

* Soit k un entier naturel non nul tel que $k \geq 2$.
  On dit qu'un entier naturel n non nul est sans facteur à la puissance k si :
  $$\{p \in \mathcal{P}, p^k | n\} = \emptyset.$$
  Lorsque $n \neq 1$, cela revient à dire que si n s'écrit $n = \prod_{k=1}^{r} q_i^{\alpha_i}$ avec des facteurs premiers q_i tous distincts, alors pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on a $\alpha_i \leq k-1$.

15 $\triangleright$ Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout r-uplet de réels $(x_1, x_2, ..., x_r)$:
$$\prod_{i=1}^{r}(1 + x_i) = 1 + \sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_m \leq r} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m} \right),$$
où la notation $\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_m \leq r}$ désigne la somme sur tous les m-uplets $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ de $\mathbf{R}^m$ qui vérifient $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq r$.

Pour les deux prochaines questions 16 $\triangleright$ et 17 $\triangleright$, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

16 $\triangleright$ Soient $A, A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$, où $\mathbf{1}_A$ désigne l'indicatrice de A.
De même, montrer que $\mathbf{1}_{A_1} \mathbf{1}_{A_2} \cdots \mathbf{1}_{A_m} = \mathbf{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m}$.

17 $\triangleright$ En déduire que si $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, alors :
$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_r) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant r} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) \right)$$

Indication : On pourra utiliser les questions 15 ▷ et 16 ▷ et se souvenir que pour un événement A, on a $P(A) = E(\mathbf{1}_A)$.

Pour toute la suite de cette partie, on se donne un entier naturel n non nul et **on note p_r le plus grand nombre premier inférieur ou égal à** n.
On a donc $p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leq n$ et $p_{r+1} > n$.

On se donne également un entier k tel que $k \geq 2$.

On s'intéresse au tirage d'un entier au hasard dans $[\![1;n]\!]$ selon la loi uniforme.
On munit $[\![1;n]\!]$ de la probabilité uniforme P_n et on note :

$$S_n(k) = \{m \in [\![1;n]\!] : \forall j \in [\![1;r]\!], p_j^k \nmid m\}.$$

On pose $q_n(k) = P_n\left(S_n(k)\right)$ qui représente donc la probabilité que l'entier choisi soit sans facteur à la puissance k.

Pour $d \in \mathbf{N}^*$, on pose $A_n(d) = \{j \in [\![1;n]\!] : d \mid j\}$.

18 ▷ Justifier que : $q_n(k) = 1 - P_n\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_n\left(p_i^k\right)\right)$. En déduire que :

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^{r} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_m \leqslant r} (-1)^m \; P_n\left(A_n\left(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \ldots p_{i_m}^k\right)\right)$$

La fonction de Möbius $\mu : \mathbf{N}^* \to \{-1; 0; 1\}$ est la fonction définie par

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ (-1)^q & \text{si } m \text{ est le produit de } q \text{ nombres premiers distincts avec } q \in \mathbf{N}^* \\ 0 & \text{sinon, c'est à dire si } m \text{ contient au moins un facteur carré} \end{cases} .$$

19 ▷ Justifier que :

$$q_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor .$$

20 $\triangleright$ Montrer que la suite $(q_n(k))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et qu'elle converge vers $\ell = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$.

Indication : on pourra introduire la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$*, où chaque* f_n *est constante par morceaux sur* $[1;+\infty[$ *et définie par :*

$$\forall d \in \mathbf{N}^*, \forall t \in [d; d+1[,\ \ f_n(t) = \frac{1}{n}\mu(d)\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor,$$

et chercher à utiliser le théorème de convergence dominée.

Partie 4 : Calcul de la somme $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$

Pour les questions 21 $\triangleright$ et 22 $\triangleright$, on se donne un réel $s > 1$ et on pose pour $i \in \mathbf{N}^*$:

$$u_i = \frac{\mu(i)}{i^s}, \quad v_i = \frac{1}{i^s}.$$

De plus, pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose $E_N = [\![1;N]\!]^2$ et $F_N = \{(i,j) \in E_N, ij \leq N\}$ et on définit

$$w_N = \sum_{d|N} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \quad \text{et} \quad S_N = \sum_{m=1}^{N} w_m.$$

21 $\triangleright$ Pour $N \in \mathbf{N}^*$, justifier que $F_N \subset E_N \subset F_{N^2}$, et montrer que la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge.
En déduire que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{m}{d}} \right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right),$$

où $\sum_{d|m}$ désigne la somme sur tous les entiers naturels divisant m.

22 $\triangleright$ Pour $N \in \mathbf{N}^*$, justifier que :

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \right) - \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right) \right| \leq \sum_{(i,j)\in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j)\in F_N} |u_i| v_j.$$

En déduire que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \left(\sum_{d|m} \mu(d) \right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

23 ▷ Pour $m \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

24 ▷ En utilisant les questions 22 ▷ et 23 ▷, en déduire que pour $s > 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

25 ▷ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} q_n(k) = \frac{1}{\zeta(k)}$.
En particulier, préciser les valeurs de $\lim_{n \to +\infty} q_n(2)$ et $\lim_{n \to +\infty} q_n(4)$.

Fin du problème