A2026 – MATH II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Solutions périodiques d'équations différentielles

Notations et définitions.

On note $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On désigne par $\mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles bornées sur $\mathbf{R}$ et par $\mathcal{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ celui des fonctions deux fois continûment dérivables sur $\mathbf{R}$.

Dans tout le problème, (E) désigne l'équation différentielle :

$$y'' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où b, c sont deux fonctions continues et 2π périodiques sur $\mathbf{R}$.

On note (EH) l'équation homogène associée :

$$y'' + b(x)y = 0 \qquad (EH)$$

On appellera solutions de (E) ou de (EH) les fonctions satisfaisant ces équations différentielles et qui sont définies sur $\mathbf{R}$ tout entier.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des solutions de (E), autrement dit :

$$\mathcal{S}(E) = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}), \forall x \in \mathbf{R}, f''(x) + b(x)f(x) = c(x)\}$$

De même on note $\mathcal{S}(H)$ l'espace vectoriel des solutions de (EH).

Le problème se propose d'étudier l'existence de solutions bornées ou de solutions périodiques à l'équation (E).

On admettra que toute fonction continue et périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée.

Pour toute fonction $f \in \mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, la norme infinie de f est :

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$$

On rappelle qu'on définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel $\mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Enfin, on note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des solutions bornées de (E) et $\mathcal{B}(H)$ l'ensemble des solution bornées de (EH).

Partie 1. Résultats généraux.

1 ▷ Démontrer que $\mathcal{B}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(H)$.

2 ▷ Lorsque l'équation (E) possède une solution bornée f_0, vérifier que les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont les fonctions de la forme $f_0 + g$ où g est un élément de $\mathcal{B}(H)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On note $T(f)$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T(f)(x) = f(x + 2\pi)$$

3 ▷ Démontrer que si f est une solution de (E) alors $T(f)$ est aussi solution de (E)

4 ▷ On suppose que f est une solution de (E) qui vérifie les deux conditions :

$$f(0) = f(2\pi) \text{ et } f'(0) = f'(2\pi)$$

Démontrer que la fonction f est 2π périodique.

Indication : considérer la fonction h définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = T(f)(x) - f(x)$

Partie 2 : Un exemple d'équation à coefficients constants.

Dans cette partie , ω est un réel strictement positif et différent de 1.
On fait les hypothèses : $\forall x \in \mathbf{R},\ b(x) = \omega^2$ et $c(x) = \cos x$.

L'équation (E) s'écrit donc :

$$y'' + \omega^2 y = \cos x$$

5 ▷ Déterminer un nombre réel d tel que la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_0(x) = d \cos x$$

soit solution de (E) et déterminer les solutions u et v de (EH) satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} u(0) = 1 & v(0) = 0 \\ u'(0) = 0 & v'(0) = 1 \end{cases}$$

6 ▷ Expliciter les ensembles $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}(E)$.

Dans les trois questions qui suivent, on suppose que f est une solution périodique de (E). On note T une période de f.

7 ▷ Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $T = 2k\pi$

8 ▷ Soient A, B les deux réels tels que $f = f_0 + Au + Bv$.

Démontrer que A, B sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} (\cos(2k\pi\omega) - 1)A + \dfrac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}B = 0 \\ -\omega\sin(2k\pi\omega)A + (\cos(2k\pi\omega) - 1)B = 0 \end{cases}$$

9 ▷ En calculant le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2k\pi\omega) - 1 & \frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega} \\ -\omega\sin(2k\pi\omega) & \cos(2k\pi\omega) - 1 \end{pmatrix}$$

démontrer que si ω n'est pas un nombre rationnel, la seule solution périodique de (E) est f_0.

10 ▷ Déterminer une période commune à toutes les solutions lorsque ω s'écrit sous la forme $\omega = \frac{p}{q}$ pour $p, q \in \mathbf{N}^*$.

Partie 3 : Unicité lorsque la fonction b est négative.

Dans cette partie on suppose que $\forall x \in \mathbf{R}$, $b(x) = -(1 + \cos x)$ et c est une fonction continue 2π périodique quelconque. L'équation (EH) s'écrit donc :

$$y'' - (1 + \cos x)y = 0$$

11 ▷ Soit g une solution de (EH). Établir que g^2 est une fonction convexe.

12 ▷ En déduire que la fonction nulle est la seule solution bornée de (EH)

On pourra admettre qu'une fonction convexe non constante n'est pas majorée sur $\mathbf{R}$

13 ▷ Démontrer que l'équation (E) possède au plus une solution bornée.

14 ▷ Prouver que si (E) possède une solution bornée, alors elle possède une solution 2π périodique.

Partie 4 : Existence d'une solution périodique.

Dans cette partie on suppose toujours que $\forall x \in \mathbf{R}$, $b(x) = -(1+\cos x)$.
L'équation (E) est donc :

$$y'' - (1+\cos x)y = c(x)$$

On se propose d'établir l'existence d'une solution périodique à l'équation (E) pour une grande classe de fonctions c continues et 2π périodiques.

On **admet** qu'il existe une suite réelle bornée $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\},\ (n^2+1)a_n + \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_{n-1}) = 0 \\ 4a_1 + a_2 = -2 \end{cases}$$

Soit M un nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on ait : $|a_n| \leq M$.

15 ▷ Démontrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum n^2 a_n$ sont absolument convergentes.

On pose pour tout x réel

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

16 ▷ Démontrer que g est une solution de l'équation différentielle

$$y'' - (1+\cos x)y = \sin x$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note s_n la fonction $x \mapsto \sin nx$. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{P}_N$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ engendré par les fonctions $s_1,\dots,s_N$. C'est l'ensemble des fonctions de la forme

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin kx$$

avec $\beta_1,\dots,\beta_N$ réels.

On note $\mathcal{P}$ la réunion des espaces vectoriels $\mathcal{P}_N$ pour $N \in \mathbf{N}^*$. $\mathcal{P}$ est donc l'espace vectoriel engendré par la famille $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

17 ▷ Démontrer que pour tout entier $N \in \mathbf{N}^*$, la famille $(s_1, \ldots, s_N)$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

Une méthode possible, mais non imposée, consiste à calculer pour $n, m \in \mathbf{N}^*, n \neq m$, *l'intégrale* $\int_0^{2\pi} s_n(t)s_m(t)dt$

On note L l'application linéaire définie sur $\mathcal{P}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall p \in \mathcal{P},\ L(p)(x) = p''(x) - (1 + \cos x)p(x)$$

18 ▷ Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $L(s_n)$ en fonction de s_n, s_{n+1} et s_{n-1} (par convention $s_0 = 0$).

19 ▷ Démontrer que L est un endomorphisme injectif de $\mathcal{P}$ et que la fonction s_1 n'est pas dans l'image de L.

20 ▷ Déduire des questions précédentes que l'on a pour tout $N \geq 1$ l'égalité :

$$L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{N+1}$$

21 ▷ On suppose que la fonction c, second membre de l'équation (E), est un élément de $\mathcal{P}$.

Démontrer que (E) possède une solution périodique.

Partie 5 : Un théorème général.

Dans cette partie on revient au cas général où les fonctions b et c sont deux fonctions 2π périodiques continues sur $\mathbf{R}$. On fait l'hypothèse que la fonction c n'est pas identiquement nulle. On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème : *Si l'équation (E) possède une solution f_0 telle que les deux fonctions f_0 et f_0' soient bornées sur* $\mathbf{R}$, *alors elle possède une solution périodique.*

On fait donc l'hypothèse que (E) possède une telle solution f_0.

On pose $M_0 = \|f_0\|$ et $M_1 = \|f_0'\|$

On rappelle que $\mathcal{B}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les solutions bornées de (E). On définit l'ensemble $\mathcal{A}$ suivant :

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{B}(E), \|f\| \leq M_0\}$$

22 $\triangleright$ Préciser un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathbf{B}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ de dimension finie contenant $\mathcal{A}$. Démontrer que $\mathcal{A}$ est une partie fermée bornée non vide de $\mathcal{H}$.

23 $\triangleright$ On note α la borne inférieure du sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{I} = \{|f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|, f \in \mathcal{A}\}$$

Démontrer que α est bien défini et qu'il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\alpha = |f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f_1'(2\pi) - f_1'(0)|$$

24 $\triangleright$ Démontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'inégalité $\alpha \leq \dfrac{2(M_0 + M_1)}{n+1}$

Indication : on utilisera la fonction g_n définie pour tout x réel par

$$g_n(x) = \frac{1}{n+1}(f_0(x) + f_0(x+2\pi) + \ldots + f_0(x+2n\pi)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(f_0)(x)$$

25 $\triangleright$ En utilisant les résultats précédents, démontrer que (E) possède une solution périodique.

Fin du problème