ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Préambule

Soit $n \geq 2$ un entier, on note :

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), M^\top M = I_n\} \text{ et } \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \det(M) = 1\}.$$

On note $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Par la suite, on notera $E = \mathbf{R}^n$ et $\|x\|$ la norme euclidienne usuelle d'un vecteur $x \in E$. On rappelle que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif et que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ en est un sous-groupe. La notation $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

En dehors des notations, les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes.

I. Quelques propriétés de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$

1 ▷ Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Examiner sa diagonalisabilité sur $\mathbf{R}$, puis sur $\mathbf{C}$.

2 ▷ Prouver que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$, autrement que par une simple référence au cours.

3 ▷ Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un ensemble compact et non connexe par arcs.

4 ▷ Prouver que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs (on pourra commencer par le cas $n = 2$).

5 ▷ Prouver que, si H est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$, alors $H = \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ ou $H = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

6 ▷ Soient $p \in]0, 1[$, $Y = (Y_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ une famille de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et de même loi donnée par $Y_{1,1} \sim \mathcal{B}(p)$. On définit alors la matrice à coefficients aléatoires :

$$\forall \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = (Y_{i,j}(\omega))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Calculer les probabilités : $P(Z_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$, $P(Z_n \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}))$, puis $P(Z_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}))$.

7 ▷ Soient x, y dans E tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe une matrice de réflexion A telle que $Ax = y$.

8 ▷ Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$, tel que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$. Soient $G \in \mathcal{G}$ et $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Prouver que, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que :

$$G_p x = \|Gx\|^p \cdot x$$

(on pourra tout d'abord traiter le cas $p = 1$).

9 ▷ Conclure que $\mathcal{G} = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

II. Calcul différentiel sur $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

10 ▷ On note $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto M^\top M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa différentielle $\mathrm{d}f(M)$ en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ On note T l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ en I_n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. Montrer que T est inclus dans l'ensemble des matrices antisymétriques.

12 ▷ Prouver que T est stable par somme, puis qu'il possède une structure d'espace vectoriel.

13 ▷ Déterminer l'ensemble T.

14 ▷ On introduit g (carré de la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) :

$$g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top M) \in \mathbf{R}.$$

Prouver que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ ne possède pas de maximum global.

15 ▷ Prouver que g et l'application det : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbf{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer leur gradient en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (en particulier, on justifiera que $\nabla \det(M) = \mathrm{Com}(M)$: comatrice de M).

16 ▷ On suppose que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ admet un extremum local en M. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $M = \lambda \cdot \mathrm{Com}(M)$, puis que $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

17 ▷ Prouver que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum global, puis calculer ce minimum ainsi que les points où il est atteint.

III. Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$, on pourra utiliser librement le fait que $\mathbf{U}$ est un groupe multiplicatif compact. Dans tout ce qui suit, φ désignera un morphisme de groupes continu du groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ dans le groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

18 ▷ Déterminer les sous-groupes bornés du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$. En déduire que $\varphi(\mathbf{U}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Soit $z \in \mathbf{U}$. Prouver que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbf{U}$.

20 ▷ On note $\Psi : x \in \mathbf{R} \mapsto \varphi(e^{ix})$. Prouver que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \Psi(x + y) = \Psi(x)\Psi(y).$$

Le but de ce qui suit est de donner (question **29** ▷) une forme générale pour Ψ, impliquant l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

21 ▷ On introduit :

$$F : x \in \mathbf{R} \mapsto \int_0^x \Psi(t)dt \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Prouver que F est une application $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x)$ est inversible si $x \in [-\alpha; \alpha]\backslash\{0\}$ — on pourra, en justifiant, utiliser le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

22 ▷ Prouver que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)dt \right) (F(\alpha))^{-1},$$

en déduire que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

23 ▷ On pose $M = \Psi'(0)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \varphi(e^{ix}) = \exp(xM).$$

IV. Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

On reprend les notations de la section précédente, dont on pourra admettre le résultat de la question **23** ▷.

24 ▷ Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Prouver que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

25 ▷ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente et non nulle. Montrer que $\ker(N) \neq \ker(N^2)$.

26 ▷ Calculer $\exp(2\pi M)$, en déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset \{ik, k \in \mathbf{Z}\}$.

27 ▷ Justifier que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à une matrice de la forme $D+N$ avec : D diagonale, N nilpotente, $DN = ND$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

28 ▷ Calculer $\exp(2\pi D)$ et $\exp(2\pi N)$, puis montrer que N est nulle.

29 ▷ Prouver qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $p \in \mathbf{N}$, $k_1, \ldots, k_p$ dans $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$, tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = Q \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & & & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{xk_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

la matrice du milieu étant diagonale par blocs et la notation R_θ ayant été définie à la question 1.

30 ▷ Réciproquement, prouver que la définition précédente fait de Ψ un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

Fin du problème