A2026 – MATH I MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Préambule

— Les lettres $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres réels.

— Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Soit $T : A \to \mathbf{R}$ une application. Soit $x_0 \in A$. On dit que T admet un minimum local (resp. un maximum local) en x_0 si :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in A, \quad (\|x - x_0\| \leq r) \implies (T(x) \geq T(x_0) \ \text{(resp. } T(x) \leq T(x_0))).$$

Un minimum ou un maximum local sera appelé un extremum local de T.

— Dans tous les espaces fonctionnels rencontrés dans le sujet, la norme utilisée est la norme $\|\cdot\|_\infty$.

I - Lemme fondamental du calcul variationnel

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbf{R})$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Le but de cette partie est de montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1 ▷ Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}.$$

2 ▷ En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

3 ▷ Soient $c < d$ deux réels. Construire une fonction $\psi_{c,d}$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, telle que $\psi_{c,d}(x) > 0$ pour tout $x \in]c, d[$ et $\psi_{c,d}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R} \backslash]c, d[$.

4 ▷ En déduire que f est nulle sur $[a, b]$.

II - Équation d'Euler-Lagrange

Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}$ non vides. Soient x_A et x_B deux réels tels que $x_A < x_B$. Soit $f : [x_A, x_B] \times U \times V \to \mathbf{R}$ une fonction, continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]x_A, x_B[\times U \times V$. Soient y_0 et y_1 deux réels fixés de U.

On introduit également l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions $y : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ telles que $y(x_A) = y_0$, $y(x_B) = y_1$ et

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y(x) \in U \quad \text{et} \quad y'(x) \in V.$$

Soit enfin l'application T définie sur $\mathcal{C}$ par :

$$\forall y \in \mathcal{C}, \quad T(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x), y'(x)) \mathrm{d}x.$$

5 ▷ Justifier que $T(y)$ existe bien pour tout $y \in \mathcal{C}$.

On suppose que T admet un extremum local en $z_0 \in \mathcal{C}$. Soit $\eta : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbf{R}$, on introduit la fonction y_ε définie sur $[x_A, x_B]$ par $y_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon\eta(x)$.

6 ▷ Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $y_\varepsilon \in \mathcal{C}$. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

On introduit sur $]-\alpha, \alpha[$ la fonction φ par

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \quad \varphi(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f\left(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)\right) \mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et que

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \ \varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)) \right) \mathrm{d}x.$$

8 ▷ Montrer alors que

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)) \right) \right) \eta(x) \mathrm{d}x = 0.$$

9 ▷ En déduire la relation suivante, appelée équation d'Euler-Lagrange :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right) = 0.$$

10 ▷ Montrer que si pour tout $(x, y, z) \in]x_A, x_B[\times U \times V$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$, alors on a l'égalité suivante, appelée identité de Beltrami :

$$\exists C \in \mathbf{R},\ \forall x \in]x_A, x_B[, \quad f(x, z_0(x), z_0'(x)) - z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)) = C.$$

III - Le chemin le plus court est la ligne droite !

$\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le produit scalaire usuel. On se donne deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de $\mathbf{R}^2$ avec $x_A < x_B$. Pour toute fonction $g : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(x_A) = y_A$ et $g(x_B) = y_B$, on définit la longueur du graphe de g, noté $\mathcal{L}(g)$, par :

$$\mathcal{L}(g) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + g'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $[x_A, x_B]$ vérifiant $y(x_A) = y_A$ et $y(x_B) = y_B$. Soit T l'application définie sur $\mathcal{C}$ par :

$$T : y \in \mathcal{C} \mapsto \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

On suppose que T admet un extremum en $y_0 \in \mathcal{C}$.

11 ▷ En utilisant l'identité de Beltrami, montrer que y_0 est une fonction affine.

IV - Le chemin le plus rapide est la cycloïde

$\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le produit scalaire usuel. Le but de cette partie est de préciser la trajectoire d'un point M minimisant le temps entre deux points A et B tous les deux fixés. Le point M est uniquement soumis au champ de pesanteur et on néglige les frottements. Le point M est initialement en A et la vitesse est supposée nulle.

Ls points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $y_A > 0$ et $y_B > 0$. On note $y_0 : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}_+^\star$ la courbe minimisant le temps de trajet que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$.

Les lois de la mécanique montrent que y_0 minimise l'application

$$y \in \mathcal{C} \mapsto T(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} \mathrm{d}x$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ vérifiant $y(x_A) = y_A$ et $y(x_B) = y_B$ et telle que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y(x) > 0$ et pour tout $x \in]x_A, x_B]$, $y'(x) < 0$.

12 ▷ Montrer qu'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y_0(x)\left(1 + y_0'(x)^2\right) = C.$$

Dans la suite de cette partie, on supposera, pour simplifier, $C = 2$.

13 ▷ On définit la fonction cotan par $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Préciser le domaine de définition de la fonction cotan. Montrer que sa restriction à l'intervalle $]0, \pi[$ est bijective sur un intervalle que l'on précisera. On notera arccotan sa bijection réciproque. Calculer $\operatorname{arccotan}'$ lorsque cela est possible.

On pose pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\theta(x) = 2 \operatorname{arccotan}(y_0'(x))$.

14 ▷ Montrer que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x))$.

15 ▷ Montrer alors qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c.$$

L'arc paramétré par $\theta \mapsto (\theta - \sin(\theta) + c, 1 - \cos(\theta))$ est appelé une cycloïde : c'est la trajectoire suivi par un point fixe sur une roue de vélo en translation uniforme.

V - Une application à une structure optimale : la caténoïde

$\mathbf{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ pour le produit scalaire usuel. Dans cette partie, nous nous intéressons à la forme qu'adopte un film de savon s'appuyant sur deux cercles définissant un cylindre droit ; la forme adoptée par le film de savon est appelée caténoïde. Sans perte de généralité, on suppose que le premier cercle a pour système d'équation $\begin{cases} y^2 + z^2 & = 1 \\ x & = 0 \end{cases}$ et le second cercle $\begin{cases} y^2 + z^2 & = 1 \\ x & = 1 \end{cases}$. On peut montrer que $y_0 : [0,1] \to \mathbf{R}$ paramétrant l'ordonnée du film de savon, que l'on suppose être de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, minimise la fonctionnelle

$$T : y \in \mathcal{C} \mapsto 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x,$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions $y : [0,1] \to \mathbf{R}$ vérifiant $y(0) = y(1) = 1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ muni de la norme infini.

16 ▷ Montrer qu'il existe un réel c non nul tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad 1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2.$$

17 ▷ Montrer que la restriction de la fonction $\mathrm{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ à $\mathbf{R}_+$ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. On note argch sa bijection réciproque. Calculer argch' lorsque cela est possible.

On suppose en outre que pour tout $x \in [0,1]$, $y_0'(x) > 0$ et $c^2 y_0(x)^2 > 1$.

18 ▷ Donner une expression explicite de y_0 (dépendant éventuellement d'une constante d'intégration).

Fin du problème