

La question 10 était ouverte et elle s'est révélée particulièrement bloquante pour ceux qui ne l'ont pas résolue. Elle était relativement simple si on s'y prenait bien et il suffisait pour cela d'avoir bien compris la notion de linéarité qui permet de se restreindre à une base. On ne peut que conseiller aux futurs candidats de ne pas passer trop vite sur une question ouverte dont la réponse peut être déterminante pour la suite du sujet. Dans ce cas précis il n'y avait plus grand-chose dans les copies de ceux qui n'avaient pas vu que uov était égal à l'identité, la question 15 qui donnait la réponse n'a pas été d'un grand secours.

Le passage des polynômes aux fonctions de classe C^∞ intervenait peu après la démonstration de la densité de l'espace vectoriel des polynômes, pourtant on trouvait dans un certain nombre de copies des tentatives de calculs directs de la composée uov , sans aucun succès bien sûr. On pourrait espérer qu'après deux voire trois années de classe préparatoire, la pratique d'un vrai problème, qui ne se résume pas à une compilation d'exercices, soit mieux maîtrisée.

La question 12 qui était plus délicate d'un point de vue topologique, n'a été bien traitée que dans les très bonnes copies. La question suivante a mis en évidence le manque d'intérêt des générations actuelles pour les calculs, puisqu'elle n'a été abordée que dans très peu de copies et presque jamais menée à son terme, ce qui a complètement neutralisé l'intervention hors programme de la fonction $argsh$.

La question de parité était assez simple dans un sens, par contre la réciproque nécessitait le résultat de la question 12, tout comme la question 15.

La question 16 a encore été abordée par un nombre significatif de candidats, ce qui montre que le problème était de longueur raisonnable, on peut à son propos faire une mise en garde : la réponse à une question ouverte n'est pas toujours non, cela marchait pour la question 7, pas pour la question 16.

Les trois dernières questions ont été très peu abordées, sauf par quelques rares candidats qui ont pratiquement terminé le problème.

En résumé, on peut conseiller aux futurs candidats de ne pas faire impasse sur la topologie, travailler les techniques de calcul et s'entraîner à traiter un problème dans sa globalité plutôt que de le voir comme une succession d'exercices.

1.2.2. Mathématiques II — MP

- Remarques générales

Le sujet de cette année avait pour objet d'établir le résultat suivant : le groupe orthogonal est « le plus gros » sous-groupe compact du groupe des matrices inversibles, en ce sens que tout sous-groupe compact qui le contient lui est égal. Bien qu'utilisant principalement le cours d'algèbre linéaire, il comportait aussi plusieurs questions de topologie, ce qui permettait aux candidats d'exposer plusieurs facettes de leurs talents au fil des 22 questions de ce problème.

De par son amplitude, l'étalement des notes de l'épreuve montre que celle-ci a bien joué son rôle, les tout meilleurs candidats étant parvenus à traiter la totalité du sujet quasiment sans faute. Un grand nombre

d'ailleurs le raisonnement s'arrête souvent net, laissant au correcteur le soin de conclure que le candidat a bien répondu à la question – ce qui du reste n'est pas toujours le cas. Et surtout, un grand nombre de copies sont des successions de calculs avec une rédaction réduite au minimum, alors qu'il est souvent nécessaire d'expliquer la méthode employée, de citer le théorème appliqué ou de justifier l'étape suivante du calcul.

Q 1. Il s'agissait de prouver qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Si l'on pouvait se limiter à considérer un vecteur propre par valeur propre pour prouver que cette condition est nécessaire, on ne pouvait éviter de recourir au théorème spectral (et non spectrale) pour établir sa suffisance, car en général un vecteur non nul n'est pas forcément propre. En outre il convient de rappeler que ce théorème affirme la diagonalisabilité de toute matrice symétrique dans une base orthonormée, sans quoi le calcul de X^TAX était impossible ou faux. Les raisonnements dans cette question ont souffert de nombreuses approximations : on prend le vecteur propre pour la valeur propre λ , on oublie de préciser que X est non nul, ou même qu'il est propre ; on affirme que $P^T X$ est non nul parce que X est non nul, ou on justifie ce fait par la non-nullité de P ; d'autres sont restés inachevés : bien des candidats ont déduit sans plus de précisions du fait que $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ est strictement positif pour tout (y_1, \dots, y_n) non nul que tous les λ_i sont strictement positifs. Certains candidats utilisent sans justification l'assertion suivant laquelle $\frac{X^TAX}{X^TX}$ est compris entre la plus petite valeur propre de la matrice A et la plus grande lorsque A est symétrique. Nous mettons également en garde les candidats qui substituent directement aux vecteurs propres la base canonique sans recours à une matrice de passage : le fait de raisonner sur les matrices et non sur les vecteurs ne permet pas une telle assimilation.

Q 2. Encore une fois, l'emploi du théorème spectral s'imposait, ainsi que le recours au résultat de la question 1, le fait que les valeurs propres sont strictement positives permettant d'en prendre la racine carrée. Un grand nombre de candidats ont pensé à ce raisonnement classique, mais il fallait encore justifier que la matrice R obtenue est bien inversible. La réciproque était aisée, à condition de ne pas oublier encore une fois de spécifier que $X^T R^T R X$ est strictement positif quand X est non nul... et de ne pas oublier de vérifier que $R^T R$ est symétrique.

Q 3. C'est le même oubli qui s'est avéré le plus fréquent dans cette question, qui a également souffert de la légèreté des raisonnements concernant le paramètre λ de $[0, 1]$. Affirmer que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$ ne peut que coûter des points. Heureusement la majorité des candidats ont pris soin de distinguer les cas $\lambda = 0$, $0 < \lambda < 1$ et $\lambda = 1$, ou ont précisé que λ et $1 - \lambda$ sont positifs ou nuls et ne peuvent être simultanément nuls. Par ailleurs tout raisonnement basé sur la diagonalisation des deux matrices symétriques considérées était voué à l'échec, du fait que celle-ci n'est pas nécessairement réalisée par la même matrice de passage.

Q 4. Il s'agissait de prouver que l'enveloppe convexe d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte. La plupart des candidats ont bien identifié l'application ϕ que l'énoncé demandait de définir, mais certains s'en sont tenus là, et d'autres se sont contentés d'affirmer que ϕ étant continue et $\mathcal{H} \times \mathbb{K}^{n+1}$ étant compact, son image $\text{Conv}(K)$ par ϕ est compacte. Or il fallait justifier la

Q 5. Dans cette question, on établissait qu'un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal. Très peu de candidats ont pensé à traiter d'abord le cas trivial $n = 1$ qui n'entre pas dans la situation décrite par l'énoncé. Si la plupart ont réussi à déduire de l'indication que $g(e_1), \dots, g(e_n)$ ont même norme, certains ont oublié de vérifier qu'ils sont deux à deux orthogonaux avant de calculer $(g(x))^2$. D'autres ont omis le carré de la norme, soit dans le calcul de $(g(e_1) + g(e_i), g(e_1) - g(e_i))$, soit même en écrivant $\|g(x)\| = \sum_{i=1}^n \|g(x_i)\|$. Enfin, terminer la question en écrivant « Soient h l'homothétie de rapport k et u un automorphisme orthogonal, alors $g = h \circ u$ » ne tient pas compte du fait que u dépend nécessairement de g , plus précisément est égale à $\frac{1}{k}g$ où k est la valeur commune des $\|e_i\|$; il ne fallait pas non plus oublier de traiter à part le cas $k = 0$.

Q 6. Un grand nombre de candidats se sont donné inutilement de la peine en redémontrant que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe, alors que c'était spécifié par la question; de surcroît, certains ne l'ont pas fait correctement, notamment en oubliant la stabilité par l'inverse, sans parler de ceux qui ont tenté de prouver que la combinaison linéaire de deux matrices orthogonales est orthogonale! Il y avait en fait deux points à établir: l'inclusion de $O_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$, qui est immédiate, et surtout son caractère compact. Alors, disons-le tout net: non, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas l'ensemble des matrices de déterminant $+1$ ou -1 , pas plus que ce n'est l'ensemble des matrices A telles que la trace de $A^T A$ est égale à n . Non, l'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas toujours un compact, comme le montre l'exemple simple de la fonction nulle sur \mathbb{R} , pas plus que l'image d'un fermé par une application continue n'est toujours un fermé, comme le montre l'exemple simple de l'image de \mathbb{R} par la fonction exponentielle. En outre, il est de bon ton de prouver que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé pour la norme proposée par l'énoncé, et non pour quelque autre norme, bien qu'on puisse rattraper le coup en invoquant l'équivalence des normes. Enfin, le caractère fermé résulte facilement du fait que $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de I_n par l'application bilinéaire (ou polynomiale) qui à la matrice A associe $A^T A$, ce qu'heureusement un grand nombre de candidats ont exposé correctement.

Q 7. Il fallait montrer qu'une suite dont les éléments sont distants les uns des autres d'au moins une même constante n'admet aucune suite extraite convergente. Si certains candidats ont invoqué la notion hors programme de suite de Cauchy, d'autres ont directement défini une suite convergente par la propriété $\|x_n - x_p\| < \varepsilon$ pour n et p assez grand, ce qui, reconnaissons-le, leur a grandement simplifié l'existence. Certains ont carrément oublié de prendre une suite extraite pour faire converger la suite entière, d'autres ont vu une contradiction avec l'hypothèse dans le fait que $\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(p)}\| \leq \varepsilon$, voire même que $\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(p)}\| \leq 2\varepsilon$! Il importait dans cette question de gérer convenablement les inégalités pour faire apparaître une vraie contradiction, et non une propriété finalement compatible avec l'hypothèse.

Q 8. Cette question a été souvent l'objet de raisonnements vaseux et dépourvus de logique ne parvenant à conclure que par des erreurs sur les quantificateurs: on affirme que la propriété d'appartenance à une réunion finie des boules est fausse pour un choix de celles-ci alors qu'elle doit être fausse pour tout choix de cette réunion finie. En réalité, le raisonnement par l'absurde se doit d'être constructif: puisqu'on suppose que K n'est contenu dans aucune réunion finie de boules, on peut construire une suite de points de K tel qu'aucun n'appartienne à la réunion des boules de rayon ε centrées sur les précédents; la contradiction

franchir ici : écriture du contraire de l'assertion demandée, construction d'une suite de boules de rayons tendant vers 0, extraction d'une suite convergente, appartenance de la limite à l'un des ouverts, obtention de la contradiction, étaient toutes rémunérées. La deuxième partie de la question a été plus ou moins bien traitée, mais certains candidats ont fait un effort louable de rigueur, les uns ayant pris un élément de K dans chaque boule définie dans la première partie, les autres ayant fait remarquer que les éléments x_1, \dots, x_p définis dans la démonstration de la question 8 appartiennent en réalité à K .

Q 10. Cette question n'a pas été souvent traitée correctement, alors qu'il suffisait de prendre les complémentaires des fermés pour se ramener à la question précédente. Notons que certains candidats ont procédé en raisonnant par l'absurde et en choisissant un élément de chaque intersection des n premiers fermés considérés : alors cette suite admet une valeur d'adhérence qui appartient à tous les fermés d'une suite de fermés F_i . Toutefois, ce raisonnement ne permet de conclure que quand la famille $(F_i)_{i \in I}$ est dénombrable, ce qui n'est pas nécessairement le cas, en particulier dans la situation où le résultat de la question 10 est employé.

Q 11. Quasiment tous les candidats ont traité cette question, mais généralement sans beaucoup de succès. Beaucoup se sont contentés d'invoquer la compacité de K pour justifier l'existence de N_G , ce qui ne pouvait évidemment suffire. Certes, une difficulté résidait dans le fait qu'aucune norme n'était définie sur $GL(E)$, ce qui rendait malaisée la démonstration du caractère bien défini de N_G . Toutefois, toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie étant équivalentes, on pouvait procéder de manière détournée en considérant l'application φ qui à u associe $u(x)$: étant linéaire en dimension finie, cette application est continue, et de ce fait l'image par φ du compact K de $GL(E)$ est un compact de E , sur lequel la norme est par conséquent bornée. Par contre, cela n'avait aucun sens de parler de la borne supérieure de K puisque ce n'est pas une partie de \mathbb{R} ; et on ne peut certainement pas dire que u étant continue, l'ensemble $\{u(x) ; x \in E\}$ est borné. Le recours à la norme d'opérateur sur $GL(E)$, notion hors programme, a été sanctionné sauf pour les candidats – assez nombreux – qui ont établi qu'il s'agit bien d'une norme avant de montrer que N_G est bien définie. Concernant les propriétés de la norme, si elles ont été quasiment toujours correctement citées, l'inégalité triangulaire a été le plus souvent bien mal établie : un argument du type « on passe au sup » sans plus de précision a été sanctionné, car il fallait indiquer dans quel ordre on prenait les bornes supérieures de $\|u(x+y)\|$, $\|u(x)\|$ et $\|u(y)\|$ pour donner au raisonnement toute sa rigueur. Quant au caractère défini de la norme, l'affirmation suivant laquelle $u(x) = 0$ pour tout $x \in G$ implique $x = 0$ était évidemment insuffisante si on ne précisait pas que tout élément de G est bijectif.

Q 12. Un grand nombre de candidats ont pris la même notation pour l'élément u de G et pour celui par rapport auquel ils prenaient la borne supérieure, et se retrouvaient ainsi avec $\sup_{u \in G} \|u^2(x)\|$.

Malheureusement, quoi qu'ils en pensent, en général, lorsque u décrit G , u^2 ne décrit pas G , comme le montre l'exemple du groupe fini des rotations d'angles $\frac{k\pi}{n}$ dans un espace vectoriel de dimension 2. On ne peut pas dire non plus que l'application qui à u associe $u \circ v$ est un isomorphisme du groupe G , et d'ailleurs cette précision n'apporte rien de plus à la démonstration ; cette application est bijective de G dans G , et cela

le télescopage des termes a échappé à certains candidats. Pour la conclusion, nombre d'entre eux ont oublié de considérer une suite extraite convergente de (x_n) , ou de rappeler que u est continue, ou encore de le justifier. Déduire brutalement et sans aucune justification de l'inégalité de l'énoncé l'égalité $\|u(a) - a\| = 0$ ne pouvait rapporter aucun point. Notons par ailleurs une tendance qui se fait jour de considérer que les termes d'une suite convergente sont égaux à la limite de la suite lorsque l'indice est assez grand : cette absence de compréhension de la notion de limite est pour nous un phénomène alarmant.

Q 14. Cette question facile utilisant le résultat de la question précédente ne devait pas nécessiter de commentaire particulier. Toutefois, nous avons constaté que certains candidats ont tenu à exposer de nouveau le raisonnement de la question 13, malheureusement encore plus mal que la première fois, ce qui ne nous a quelquefois pas permis de les rétribuer pour cette question.

Q 15. La relation $u(a) = a$ et le premier résultat de la question 12 devaient permettre d'obtenir facilement la première égalité, hélas nombre de candidats ont considéré celle-ci comme évidente, sans doute par une sorte de linéarité de la norme, et d'autres ont argué de la proportionnalité des $u_i(a)$, alors que c'est précisément ce que l'on démontre à la question suivante à partir de celle-ci. Quant à la deuxième, certains candidats ont cru être subtils en appliquant l'égalité précédente aux $r - 1$ points $u_i(a)$ pour $i \neq j$, malheureusement l'ensemble d'éléments de G n'étant pas le même, il n'y a a priori aucune raison pour que le point fixe de leur moyenne soit le même. Pour la même raison, tout raisonnement par récurrence sur k était voué à l'échec. Le résultat découlait tout simplement de deux emplois successifs de l'inégalité triangulaire, la première fois avec deux vecteurs et la deuxième avec $r - 1$ vecteurs, et l'égalité précédente permettait alors de conclure.

Q 16. Il suffisait d'appliquer l'égalité précédente et le deuxième résultat de la question 12, sans oublier de traiter à part le cas où $u_j(a)$ est nul.

Q 17. Il fallait montrer que le coefficient de $u_j(a)$ dans l'égalité de la question précédente est égal à 1. La définition de u comme moyenne des u_j ne donnait qu'une égalité sur la somme de ces coefficients, bien insuffisante pour conclure. Certains candidats ont subtilement eu recours au caractère borné de K en calculant $u^n(a)$ et $u^{-n}(a)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$. En réalité, ce sont encore une fois la relation $u(a) = a$ et le premier résultat de la question 12 qui permettaient de conclure simplement et rapidement, en n'oubliant pas toutefois de traiter à part le cas $a = 0$.

Q 18. Cette question a été assez rarement abordée, alors qu'il suffisait d'utiliser le résultat de la question 10 avec comme fermés les ensembles de vecteurs stables par les éléments de G , autrement dit les sous-espaces propres de ces éléments pour la valeur propre 1.

Q 19. Nonobstant son apparence simple, cette question n'était nullement évidente, car déjà il fallait penser à tout ce qu'il fallait démontrer – ou du moins mentionner. Pour commencer, la linéarité de ρ_A , qui a été rarement évoquée. Plus souvent a été établie sa bijectivité, bien que parfois de manière très maladroite : à ce niveau, un étudiant ne devrait pas établir l'injectivité d'une application linéaire f en prouvant que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, mais recourir systématiquement à la notion de noyau. Last but not least, la continuité de ρ_A , que l'énoncé n'admet pas, puisqu'il admet seulement que pour tout M , l'application qui à

- Δ est compact : en tant qu'image continue de G par l'application continue (car polynomiale en les composantes de A) qui à A associe $A^T A$, c'était plutôt simple.
- Δ est contenu dans S_n^{++} : c'est une conséquence évidente de la question 2.
- K est compact : c'est une conséquence évidente de la question 4.
- K est contenu dans S_n^{++} : cela résulte de la convexité de S_n^{++} .
- K est stable par tous les éléments de H : un certain nombre de candidats ont établi cette propriété pour Δ et non pour K . Il suffisait alors de prendre une combinaison linéaire d'éléments de Δ – soit en nombre quelconque, soit de $n^2 + 1$ éléments au vu de la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ – pour conclure aisément.

Q 21. La première partie de la question résultait directement de la question 18, dont il fallait simplement vérifier que H et K satisfaisaient les hypothèses. La question 2 permettait alors de construire la matrice N , ce que la plupart des candidats qui ont traité cette question ont vu. Par contre, bien peu ont pensé à démontrer que G_1 constitue un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, ce qu'ils pouvaient soit faire directement, soit déduire du fait que l'application qui à A associe $N^{-1}AN$ est un isomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait tout de même prendre la peine de démontrer.

Q 22. Peu de candidats ont traité cette question avec profit. Le fait que l'application $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie était facile à établir en la composant avec elle-même, malheureusement certains candidats ont pris comme définition de la symétrie la propriété caractéristique des projections. Son caractère orthogonal est la traduction en termes d'endomorphismes de la troisième partie de la question précédente. Si plusieurs candidats ont vu la conservation de $g(P)$ et de son orthogonal par $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$, bien peu ont pensé à vérifier que sa restriction à $g(P)$ est l'identité et celle à son orthogonal est l'opposé de l'identité. La conservation de l'orthogonalité de deux vecteurs pouvait alors s'obtenir en prenant la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à l'un des vecteurs. La dernière partie de la question résultait alors du fait que tout élément de K est composé de trois matrices orthogonales.

Quand ils seront devenus ingénieurs, les candidats à ce concours auront sans doute oublié une grande partie de ce qu'ils auront appris sur les bancs des classes préparatoires, et en particulier leur enseignement de mathématiques. Au moment d'en subir les épreuves, ils considèrent peut-être que c'est une étape fastidieuse, mais incontournable, un moyen de sélection parmi d'autres pour retenir les futurs étudiants des grandes écoles. Toutefois, qu'ils n'oublient pas que, dans toutes les techniques qu'ils mettront en œuvre, les mathématiques jouent généralement un rôle essentiel, et que l'utilité de celles-ci se découvre parfois de manière fortuite : qu'il suffise de penser à la théorie des ondelettes qui joue un rôle majeur dans le format d'image jpg, et à celle des groupes cycliques finis sans laquelle le cryptage RSA n'existerait pas. Et s'ils vont visiter le château du Clos-Lucé à Amboise, après être tombés en admiration devant la réalisation concrète des idées de Léonard de Vinci, qu'ils méditent cette pensée de lui affichée dans l'une des salles : « Aucune investigation humaine ne peut s'intituler véritable science si elle ne passe pas par la démonstration mathématique ».