



CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1

1/ THÈME DE L'ÉPREUVE

Ce sujet était constitué de deux exercices et d'un problème, tous indépendants, totalisant 24 questions et prenant en compte les nouveaux programmes mis en vigueur en 2021-2022.

Le premier exercice propose de démontrer des égalités sur les normes matricielles et notamment sur une norme subordonnée.

Le deuxième exercice s'intéresse à l'étude d'une fonction de 2 variables et plus précisément sur son point critique et son extremum à l'aide de sa matrice hessienne.

Enfin, le problème tourne autour de techniques de calcul d'intégrales généralisées. Il introduit quelques notions de convergence de séries et notamment d'interversion de symboles. Le but est de faire le lien avec la fonction Gamma, pour en déduire la formule des compléments ainsi que l'expression de l'intégrale de Gauss.

Ce sujet couvrait de nombreuses parties du programme : Espace vectoriel normé, Calcul différentiel, Séries de fonctions, Intégrales sur un intervalle quelconque et Équations différentielles.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet a été globalement bien compris et est accessible à tout élève ayant bien travaillé les programmes.

La moyenne de 10,40 et l'écart type de 4,65 permettent de bien évaluer et classer les candidats répondant aux objectifs du concours.

La notion de fonction intégrable n'est pas bien comprise par tous les candidats et les majorations (notamment dans les théorèmes d'interversion) sont parfois hasardeuses (fausses ou non intégrables).

Nous rappelons qu'une copie dont les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés est sanctionnée.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

EXERCICE I

- Q1.** La séparation de la norme est parfois oubliée. L'étape la plus importante dans cette question est l'inégalité triangulaire où le passage au maximum est souvent mal expliqué.
- Q2.** Il y a quelques erreurs dans les indices des sommes. La majorité oublie de justifier que l'ensemble est non vide pour l'existence de la borne supérieure.
- Q3.** Il fallait ici majorer en utilisant la définition du sup puis renormaliser le vecteur. Certains candidats sont hors sujet en utilisant la mauvaise norme.
- Q4.** Question peu réussie. De nombreux candidats se trompent sur les valeurs absolues.
- Q5.** Quelques erreurs de calculs en inversant les colonnes et les lignes de la matrice.

EXERCICE II

- Q6.** Question bien réussie malgré certains candidats qui ne calculent pas l'image de la fonction et répondent trop rapidement.
- Q7.** Question bien réussie malgré un manque de rigueur chez quelques personnes.
- Q8.** La matrice Hessienne est la plupart du temps correcte mais les justifications sur l'extremum sont trop souvent maladroites ou incomplètes.

PROBLÈME

- Q9.** Question bien réussie. Certains font tout de même de grosses erreurs sur les équivalents.
- Q10.** Question bien réussie, le changement de variable a été trouvé en général.
- Q11.** Beaucoup essayent de montrer la convergence uniforme alors que l'intitulé de la question donnait une indication sur la réponse. Le théorème de la double limite permettait de répondre.
- Q12.** L'hypothèse de domination est souvent fausse ou non intégrable. En particulier, le critère spécial des séries alternées ne permet pas de donner une majoration de la somme partielle.
- Q13.** Bien traitée mais les changements d'indices dans les sommes sont parfois mal compris par les candidats.
- Q14.** Globalement bien traitée.
- Q15.** Question très classique, pourtant certains étudiants se trompent sur l'intégrabilité au voisinage de 0 (et pensent que la fonction tend vers 0 en 0). Quelques candidats perdent du temps à prouver la continuité de la fonction (ce qui n'était pas demandé).

- Q16.** La domination (pas toujours réussie) permettait de répondre aussi à la première partie de la question (sur le fait que la fonction était bien définie).
- Q17.** Beaucoup dominant la dérivée partielle par $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t}$ qui n'était pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Q18.** La majoration ne peut pas fonctionner sur tout segment puisque x tend vers l'infini. D'autres utilisent la continuité de f_α pour intervertir (ce qui ne fonctionne pas ici en l'infini).
- Q19.** La deuxième partie concernant la limite de l'intégrale n'a pas été bien traitée et les justifications ont été peu nombreuses.
- Q20.** Question bien traitée.
- Q21.** La majorité des candidats a su démontrer que g était bien une solution de l'équation différentielle. En revanche, peu d'étudiants ont su bien justifier l'égalité $f = g$ (alors qu'il suffisait de résoudre l'équation puis d'utiliser la limite). Certains ont voulu utiliser l'unicité des solutions mais la limite en l'infini n'est pas une condition initiale (exemple avec $y' + y = 0$ où toutes les solutions tendent vers 0 en l'infini).
- Q22.** Question bien traitée.
- Q23.** Question bien traitée.
- Q24.** Question pas toujours abordée.

4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroté les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.